楕円K3曲面による力学モデルとHamiltonモノドロミー (幾何学的力学系の新展開)

多羅間, 大輔

数理解析研究所講究録
第 1774 巻 2012 年 57-62

楕円K3曲面による力学モデルと Hamiltonモノドロミー

多羅間 大輔
京都大学大学院情報学研究科
数理工学専攻
Daisuke Tarama[1]
Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University

本稿では，楕円K3曲面のLagrangeファイブレーションとそれに付随するHamiltonモノドロミーについて考察する．楕円K3曲面をLagrangeファイブレーションとみなす方法について述べ，その具体的構成を楕円曲面のWeierstraß標準形を用いて与える．最後に，楕円K3曲面による力学モデルで適当な12個のI_1型特異ファイバーの周りのモノドロミーが単位行列となる概トーリックLagrangeファイブレーションを与えるものを構成する．

1 序

本稿は論文 [10] の要約である．Liouvilleの意味での完全積分可能系とは，$2n$次元シンプレクティック多様体上のHamilton力学系でHamilton函数を含むn個の函数的に独立な第一積分をもつものをいう．Liouville-Arnol'dの定理より，このような系に対して局所的には作用-角変数をとることができる．しかし，作用-角変数が大域的に取れるか否かは自明ではない．[5] によると，作用-角変数が大域的に取れるためにはいくつかの位相不変量があることが示されおり，その1つがHamiltonモノドロミーである．

Hamiltonモノドロミーはある種の分岐現象を反映した不変量であると考えられ，そのため様々な古典力学の完全積分可能系についてそのHamiltonモノドロミーが計算されてきた．その一方，近年Hamiltonモノドロミーの量子版である量子モノドロミーが盛んに研究されている．2009年12月に開催された数理解析研究所研究集会「幾何学的力学系理論とその周辺」でも，B. Zhilinskiíが量子モノドロミーの話題について講演 ([11] を参照のこと) を行っている．半古典近似の立場に立てば量子モノドロミーは大略以下のようなものである．簡単のため系の自由度は2とする．Liouvilleの意味での完全積分可能系が与えられてとする．第一積分を並べると運動量写像を構成することができ，これは像へのLagrangeファイブレーションとみなせる．すると，このファイブレーションの像の点で対応するファイバーがBohr-Sommerfeld量子化条件を満たすものを考えると，これらの点は局所的に整数格子の構造を持つ．ところが，一般に運動量写像には特異ファイバーが存在するため，この局所的な整数格子の構造は全体としては欠損を持つ格子をなす．局所的な格子の基本平行四辺形をとって，欠損の周りを1周回る閉曲線に沿って平行移動させ

[1]JSPS Research Fellow (DC2), e-mail: `dsktrm@amp.i.kyoto-u.ac.jp`

ながら一周接続させてゆくと，1サイクル後には元の基本平行四辺形とは別の平行四辺形に移り，2つの平行四辺形は何らか行列で変換が記述される．この行列が量子モノドロミーである．量子モノドロミーについての詳細は[11, 12]やそこに引用されている文献を参照されたい．

Zhilinskiíは逆の問題提起も行っている．通常は古典力学の完全積分可能系が与えられたとして，上に述べた半古典量子化の手続きを経て欠損を持つ格子の構造を得る．しかし逆に，欠損を持つ格子の構造が与えられたとして，完全積分可能系でそこからもとの欠損を持つ格子の構造やモノドロミーが復元できるものはないかと問うことができる．

実際は，格子の欠損とモノドロミーとの関係は自由度2の場合でも単純ではなく，モノドロミー行列が同じでも格子の構造は異なることもある．そのような場合には，欠損を持つ格子の構造に対して基本平行四辺形を欠損の周りを回る閉曲線に沿って平行移動させながら接続させる際の 2π 回転（自転）の回数を考慮に入れなければならないと[11]では指摘されている．実際，A.V. Bolsinov，H.R. Dullin，A.P. Veselovは3次元可解多様体上の可解Lie群の右不変Riemann計量から誘導されるRiemann計量についての測地流(完全積分可能系である)とその量子化を考察し，Hamiltonモノドロミーおよび量子モノドロミーが可解多様体を定める双曲型の行列 $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ を用いて，それぞれ $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とかけることを示した．もとの力学系は自由度が3であるが，格子の欠損としては本質的に2次元のものとなる．特に $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の場合(この行列はArnol'd cat mapと呼ばれる)，基本平行四辺形を上の方法で欠損の周りを回る閉曲線に沿って1サイクルだけ平行移動させながら接続すると 2π 回転（自転）したうえで行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ の変換を受ける．一方で，同じく行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ をモノドロミーとする欠損を持つ格子の構造で基本平行四辺形の回転（自転）を伴わないものが構成できることが[11]に述べられている．そこで，2π 回転を伴うような単位行列モノドロミーを与える具体的な完全積分可能系があるかが問題となる．このような完全積分可能系の具体的構成は，Zhilinskiíによって K3曲面を用いて与えられるのではないかと示唆されていたが，これまでは行われていなかった．

欠損を持つ格子の構造は，数学や物理学に限らず様々な分野で現れる．特にZhilinskiiが[11]で言及しているのは，植物学に現れるヒマワリの花にみられる欠損を持つ格子の構造である．この格子の欠損からも 2π 回転（自転）を伴うような単位行列モノドロミーを読み取ることができ，そのような観点からも，上記の力学モデルの具体的構成は興味を持たれている．

本稿では，Lagrangeファイブレーションや概トーリックLagrangeファイブレーションについて述べたのち，K3曲面を実4次元相空間とみなす方法や楕円K3曲面をLagrangeファイブレーションとみなす方法を一般的に与える．具体的構成は，楕円曲面のWeierstraß標準形を用いて与えられる．最後に，上で述べた 2π の回転を伴う単位行列モノドロミーを持つ具体例を与える．

2 概トーリックLagrangeファイブレーション

前節に述べたように，完全積分可能系が与えられたとすると，その函数的に独立な第一積分を並べて運動量写像を得る．これはLagrangeファイブレーションとなるのであった．Lagrangeファイブレーションの定義を振り返ってみると次の通りであった．

定義 1 *(M,ω) を $2n$ 次元シンプレクティック多様体として，B を n 次元多様体 (境界を持つことも許す) とする．写像 $f: M \to B$ が Lagrange ファイブレーションであるとは，稠密な開集合 $B_0 \subset B$ があって，その上で制限 $f|_{f^{-1}(B_0)} : f^{-1}(B_0) \to B_0$ が Lagrange ファイバー束となることである．*

Liouville-Arnol'dの定理より，Lagrangeファイブレーションは局所的に定義された完全積分可能系を集めたものである．このLagrangeファイブレーションの定義は若干一般的すぎ，より条件を強めた次の概念がN.C. LeungとM. Symingtonにより導入されいてる．

定義 2 ([9]) *Lagrange ファイブレーション $f : (M,\omega) \to B$ が概トーリック Lagrange ファイブレーションであるとは，f の各臨界点周りで次のような Darboux 座標 $(p,q) = (p_1,\cdots,p_n,q_1,\cdots,q_n)$ が取れることをいう：*
$\omega = \sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q_i$ であり，写像 $f = (f_1,\cdots,f_l,f_{l+1},\cdots,f_n)$ が局所的に $f_i(p,q) = p_i$ $(i \leq l)$ および $f_j(p,q) = p_j^2+q_j^2$ または $(f_j,f_k)(p,q) = (p_jq_j+p_kq_j, p_jq_k-p_kq_j)$ $(j,k \geq l+1)$ のようにあらわされる．また，f の各ファイバーは連結かつコンパクトとする．

概トーリックLagrangeファイブレーションは局所的な完全積分可能系の構造を集めたもので平衡点として，focus-focusかcentre-centre（これらの4次元完全積分可能系の標準形の分類については[3]を参照されたい）かあるいはその直和のみを許したものであるといえる．なお，Hamiltonモノドロミーは一般のファイバー空間の正則ファイバーのホモロジー群から定まる局所定数層のモノドロミーと同様に定義されるLagrangeファイブレーションのモノドロミーのことである．

3 実4次元相空間としてのK3曲面

K3曲面とはコンパクトな複素曲面 M で単連結かつ非零正則2形式 Ω が存在するものをいう．K3曲面を実4次元相空間（シンプレクティック多様体）とみなすのはたやすい．

命題 1 正則2形式 Ω の実部 $\omega = \frac{1}{2}\left(\Omega + \overline{\Omega}\right)$ は M を実4次元多様体とみなしたとき，実シンプレクティック構造を定める．

この実シンプレクティック形式 ω に関する，M（の開集合）上で定義された実数値函数 h をHamilton函数とするHamiltonベクトル場 X_h^ω が $\iota_{X_h^\omega}\omega = -\mathrm{d}h$ で定まる．

一方，非零正則2形式 Ω も複素多様体 M の正則シンプレクティック形式とみなせるため，M（の開集合）上の（複素数値）函数 h に対して，Ω に関する複素Hamiltonベクトル場 X_h^Ω が $\iota_{X_h^\Omega}\Omega = -\mathrm{d}h$ で定まる．

かくして2種類のHamiltonベクトル場を得たわけであるが，これらの関係が自然と問題になる．実際，h が M の開集合上定義された正則函数であれば，以下のことがわかる．

命題 2 **([6, 2])** 函数 h が M の開集合上定義された正則函数であれば，複素 *Hamilton* ベクトル場 X_h^Ω と実 *Hamilton* ベクトル場 $X_{\mathrm{Re}(h)}^\omega$ および $X_{\mathrm{Im}(h)}^\omega$ とは以下のように関係づけられる：

$$X_{\mathrm{Re}(h)}^\omega = \mathrm{Re}(X_h^\Omega), \qquad X_{\mathrm{Im}(h)}^\omega = \mathrm{Im}(X_h^\Omega).$$

命題 3 **([6, 2])** 函数 h が M の開集合上定義された正則函数であれば，実部 $\mathrm{Re}(h)$ および虚部 $\mathrm{Im}(h)$ はシンプレクティック形式 ω の定める *Poisson* 構造に関して可換である．

この 2 つの命題により，K3 曲面の開集合上に正則函数 h が与えられたとすると，その実部と虚部をとることによって，局所的に完全積分可能系が定まることがわかる．Liouville-Arnol'd の定理の観点からは，h の実部および虚部が作用変数を与えることがわかる．しかし，函数論でよく知られた Liouville の定理により M 全体で定義された正則函数は定数しかない．上のような正則函数を用いた方法では作用変数は局所的にしか定義されず，さらに運動量写像も全体では定義できない．そこで，運動量写像ではなく M からの Lagrange ファイブレーションを考えることとなる．M 全体で定義された Lagrange ファイブレーションを得るために，M 上の有理型函数を考える．実際，M の開被覆の各開集合上で正則函数が互いに整合的に定義されているとすると，有理型函数 $f : M \to P_1(\mathbb{C})$ を得る．上の議論を振り返ると，f は (M, ω) から $P_1(\mathbb{C})$ への Lagrange ファイブレーションであることがわかる．次節では，このような意味での K3 力学モデルの具体的構成について述べる．

4 Lagrange ファイブレーションとしての楕円 K3 曲面

前節に述べた意味での K3 力学モデルを楕円 K3 曲面の Weierstraß標準形を用いて構成する．$L_2 \to P_1(\mathbb{C})$ を第 1 Chern 類が 2 の正則直線束，$\mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})} \to P_1(\mathbb{C})$ を自明束とし，$P_1(\mathbb{C})$ 上の $P_2(\mathbb{C})$-束 $P(L_2^{\otimes 2} \oplus L_2^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})})$ を考える．この $P_2(\mathbb{C})$-束の斉次ファイバー座標を $(x : y : z)$ とし，正則切断 $g_2 \in H^0(P_1(\mathbb{C}), L_2^{\otimes 4})$ および $g_3 \in H^0(P_1(\mathbb{C}), L_2^{\otimes 6})$ によって決まる方程式

$$y^2 z = 4x^3 - g_2 x z^2 - g_3 z^3.$$

が定める超曲面 W は Weierstraß標準形の楕円曲面 $\pi_W : W \to P_1(\mathbb{C})$ を定める．

曲面 W は一般に特異点を持つが，それらを解消すると K3 曲面を得る．具体的には，底空間 $P_1(\mathbb{C})$ のアファイン座標 t および非斉次ファイバー座標 $\overline{x} = \frac{x}{z}$，$\overline{y} = \frac{y}{z}$ を用いて定義される正則 2 形式 $\Omega = \frac{\mathrm{d}\overline{x}}{\overline{y}} \wedge \mathrm{d}t$ は，W の特異点を除いた開集合上で定義される正則 2 形式であり，さらに W の最小特異点解消 $\widehat{W}$ にまで拡張されて非零正則 2 形式を定めることが示され，$\widehat{W}$ は K3 曲面であることがわかる．前節の方法により，滑らかな楕円 K3 曲面 $\pi_{\widehat{W}} : \widehat{W} \to P_1(\mathbb{C})$ は Lagrange ファイブレーションとみなすことができる．

なお，正則函数 t を Hamilton 函数とする複素 Hamilton 方程式は

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}} & = -\overline{y}, \\ \dot{\overline{y}} & = -\frac{12\overline{x}^2 - g_2}{2}. \end{cases}$$

のように与えられる．楕円函数論の Weierstraß $\wp$ 函数についての公式 $\ddot{\wp} = \frac{12\wp^2 - g_2}{2}$ を思い出すと（[7] を参照），この力学系は本質的に Weierstraß $\wp$ 函数で解けることがわかる．

5 具体例

この節では，Weierstraß標準形の楕円K3曲面によって与えられるK3力学モデルで，適当な12個の特異ファイバーに対応するモノドロミー行列が単位行列で与えられるものを具体的に構成する．序文にも述べたように，このような力学モデルの具体的構成はZhilinskiíによって問題提起されていたものである．詳しくは，[11, 12] を参照されたい．

まず，$L_1 \to P_1(\mathbb{C})$ を第1 Chern類が1の正則直線束とする．正則切断 $g_2 \in H^0(P_1(\mathbb{C}), L_1^{\otimes 4})$ および $g_3 \in H^0(P_1(\mathbb{C}), L_1^{\otimes 6})$ を正則函数の組 $\{t^2, \tau^2\}$ および $\{t^3, \tau^3\}$ で与える．ただし，t および τ は $P_1(\mathbb{C})$ のアファイン座標で $t = \frac{1}{\tau}$ である．そこで，方程式 $y^2 z = 4x^3 - g_2 xz^2 - g_3 z^3$ が $(x:y:z)$ を斉次ファイバー座標とする $P_2(\mathbb{C})$-束 $P(L_1^{\otimes 2} \oplus L_1^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_{P_1(\mathbb{C})})$ の全空間に定める楕円曲面 $\pi_W : W \to P_1(\mathbb{C})$ を考える．曲面 W は，$t=0$ および $t=\infty$ 上のファイバーに沿って D_4 型特異点を持ち，これらを解消すると2つの I_0^* 型特異ファイバーを持つ楕円曲面 $\pi_{\widehat{W}} : \widehat{W} \to P_1(\mathbb{C})$ を得る．楕円曲面の特異ファイバーの分類は，小平邦彦によって [8] で与えられている．特異ファイバーの型については，[8, 1] を参照されたい．特異ファイバーに付随するモノドロミー行列の共役類も決定されている．特に，I_0^* 型特異ファイバーのモノドロミー行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられることが知られている．

次に，複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ を $1 < |\alpha| \ll \infty$ ととって，底空間 $P_1(\mathbb{C})$ の2点 $t=1$ および $t=\alpha$ で分岐した2重被覆 $\widetilde{B}$ を考える．この2重被覆 $\widetilde{B}$ も $P_1(\mathbb{C})$ に同型である．楕円曲面 $\pi_{\widehat{W}} : \widehat{W} \to P_1(\mathbb{C})$ を $\widetilde{B}$ 上に引き戻すと，4つの I_0^* 型特異ファイバーを持つ楕円K3曲面 $\pi_{\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to \widetilde{B}$ を得る．($\widetilde{W}$ はKummer曲面である.)

さて，上の楕円曲面 $\pi_W : W \to P_1(\mathbb{C})$ を定める正則切断 g_2 および g_3 を，その零点が重複しないように微小変形させると，それに伴って楕円K3曲面 $\pi_{\widetilde{W}} : \widetilde{W} \to \widetilde{B}$ も変形され，結果として24個の I_1 型特異ファイバー（位相幾何学的には1つのサイクルを消滅させた特異点を持つトーラスである）を持つ楕円K3曲面 $\pi_{\widetilde{W}'} : \widetilde{W}' \to \widetilde{B}$ を得る．2重被覆 $\widetilde{B} \to P_1(\mathbb{C})$ による $t = 0, \infty$ の逆像の4点のそれぞれの近傍に6本ずつ I_1 型特異ファイバーが現れる．I_0^* 型特異ファイバーのモノドロミー行列が $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ で与えられるので，たとえば，$t=0$ の逆像の2点の近傍の各6点の特異ファイバーの像の周りを1回転ずつ回る閉曲線に対応するモノドロミーは $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる．[9] によると，24個の I_1 型特異ファイバーを持つK3曲面のLagrangeファイブレーションは概トーリックLagrangeファイブレーションである．まとめると次を得る．

定理 1 上で構成された楕円 *K3* 曲面 $\pi_{\widetilde{W}'} : \widetilde{W}' \to \widetilde{B}$ は，一般にすべての平衡点が *focus-focus* であるような概トーリック *Lagrange* ファイブレーションであり，底空間の正則値のなす開集合内の *12* 個の特異ファイバーの像の周りを回る閉曲線で対応するモノドロミー行列が単位行列となるようなものが存在する．

参考文献

[1] W. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, second ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 2004.

[2] L. Bates and R. Cushman, Complete integrability beyond Liouville-Arnol'd, Rep. Math. Phys., 56(1), 77-91, 2005.

[3] A.V. Bolsinov, *Integrable Hamiltonian Systems: Geometry, Topology, Classification*, Chapman & Hall/CRC, 2004.

[4] A.V. Bolsinov, H.R. Dullin, and A.P. Veselov, Spectra of *sol*-manifolds: arithmetic and quantum monodromy, Commun. Math. Phys., 264, 583-611, 2006.

[5] J.J. Duistermaat, On global action-angle coordinates, Comm. Pure Appl. Math., 33, 687-706, 1980.

[6] H. Flaschka, A remark on integrable Hamiltonian Systems, Phy. Let. A, 131(9), 505-508, 1988.

[7] A. Hurwitz, *Vorlesungen über Allgemeine Funktionentheorie und Ellipticke Funktionen*, 5. Auflage, Berlin-Heidelberg-New York-Barcelona-Hongkong-London-Mailand-Paris-Singapur-Tokio, Springer, 2000.

[8] K. Kodaira, On compact analytic surfaces : I, II, III, Ann. of Math., 71, 111-152, 1960; 77, 563-626, 1963; 78, 1-40, 1963.

[9] N.C. Leung, M. Symington, Almost toric symplectic four-manifolds, J. Symplectic Geom., 8(2), 143-187, 2010.

[10] D. Tarama, Elliptic K3 surfaces as dynamical models and their Hamiltonian monodromy, preprint.

[11] B. Zhilinskií, Hamiltonian monodromy, its manifestations and generalizations, 数理解析研究所講究録 1692, 57-77, 2010.

[12] B. Zhilinskií, Quantum monodromy and pattern formation, J. Phys. A, 43, 434033, 2010.